Всероссийская олимпиада студентов
образовательных организаций высшего образования по математике
III тур
Хабаровск-2015

Задача 1. Пусть $A(1), A(2), \ldots, A(n), \ldots$ – бесконечная последовательность чисел с $A(1) = 1$, такая что $A(n+2)A(n) = A^2(n+1)$ для любого натурального n. Доказать, что если $A(2)$ – натуральное число, то и все элементы последовательности $A(n)$ – натуральные числа.

Задача 2. Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – соответственно монотонно возрастающая и монотонно убывающая непрерывные функции. Каким может быть наибольшее число локальных максимумов у произведения $f \cdot g$?

Задача 3.
а) Найдите многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ такой, что

$$f(0) = a_0, \quad f(1) = a_1, \quad f(2) = a_2;$$

б) Докажите, что для любого $n \geq 1$ существует многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

такой, что

$$f(0) = 0, \quad f(1) = a_1, \ldots, f(n) = a_n.$$

Задача 4. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая на всей числовой оси функция f удовлетворяет условиям $|f(x)| \leq 1$ и $|f''(x)| \leq 1$ для любого вещественного x. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f'(x)| \leq 2$.